Bir Yeterlik Alanı Olarak Matematiksel Modellemenin Yeniden Gözden Geçirilmesi

Prof. Dr. Murat Altun, Bursa Uludağ Üniversitesi, Bursa, maltun@uludag.edu.tr

Öz

"Yaşamsal durumlardaki olaylar ve bunlar arasındaki ilişkileri matematiksel olarak ortaya çıkarma" anlamına gelen matematiksel modelleme, öğretimide kazandırılması gereken matematiksel yeterliklerin önemli olanlarından biridir. olup modelleme kavramının, literatürde açıkça yer almayan iki boyutunu tartışmayı amaçlamaktadır. Bunlardan biri modellenen durumun ne oluğu, diğeri modellemenin kapsamıdır. Bir literatür incelemesi yoluyla gerçekleştirilen bu çalışmada bulgular yaşamsal durumların (i) kararlı (ii) kısmi kararlı davranan durumlar ve (iii) kararsız davranan durumlar şeklinde bir sınıflamaya tabi tutulabileceğini ve her yaşamsal durumun modellenemeyeceğini ortaya koymuştur. Modelleme bunlardan ilk ikisinde söz konusudur.

Çalışma kapsamında ikinci olarak; modellemenin sadece doğal durumlarla sınırlı olmadığını, yaşanan hayatı düzenlemek için konan matematik içerikli kuralların da modelleme kapsamında değerlendirilebileceği sonucuna varılmıştır. Ayrıca bu çalışmada modellemenin çok karıştırıldığı, problem çözme ve soyutlama kavramları ile farkı ele alınmıştır.

Çalışma bu hususlara getirdiği açıklama ile matematiksel modelleme öğretiminin daha nitelikli olarak gerçekleşmesine katkıda bulunabilmmesi beklenebilir.

Anahtar kelimeler: Matematiksel modelleme, matematik öğretimi, matematik okuryazarlığı
Not: Bu çalışma 218K515 numaralı Tübitak projesi kapsamında yapılmıştır.

Review of Modelling as Mathematical Competence

Abstract

Modelling, which comes to means to reveal the events in life situations and the relationships between them mathematically, is one of the greatest mathematical competence. The present study has been done by way of literature review and its aims to discuss the two aspects of modelling that are not explicitly included in the relevant literature. The first aspect is that every life situation cannot be modeled, and it reveals that life situations can be classified as (i) stable (ii) partially stable acting situations and (iii) unstable acting situations. Modelling is included in the first two of them. The third one is the life situations that cannot be modeled.

Secondly, within the scope of the study, the aim of this study is to demonstrate that modelling is not only limited to natural situations, but it can also be modeled by attributing mathematics to social events. Such models are the competence area on which we are based in organizing social life. Furthermore, it has also been noted in this study that modelling is confused; the difference of modelling with the concepts of problem solving and abstraction has been discussed, and in which situations modelling in mathematics education should be considered as a purpose and in which situations as a tool.

With the clarification that the study conveys regarding these two specific points, it will be possible to develop more qualified mathematical modelling competence

Keywords: Mathematical modelling, mathematics teaching, mathematical literacy
Note: This study has been carried out within the scope of Tübitak 1003 project no 218K515.

Giriş

Günümüz matematik öğretiminde matematik okuryazarlığının öne çıkması ile birlikte bilgi ağırlıklı içeriğin yerine "matematiksel yeterliklerin geliştirilmesi" geçmiş bulunmaktadır(Niss ve Højgaard, 2019) Bu durum her bir yeterliğin ayrıntılı tanınması ihtiyacını doğurmuştur. Bu çalışmanın konusu bu yeterliklerden biri olan matematiksel modellemeyi (diğerleri problem çözme ve kurma, muhakeme ve argümantasyon, iletişim, sembolik ve formal dili kullanma, matematiksel araç ve gereçleri kullanma, temsil ile gösterim (OECD, 1989)) bazı yönleri bakımından tartışmaktır.

Matematiksel modelleme gerçek hayat durumlarının işleyişini ve yapısını anlamlandırabilmek için sembolik matematik diline aktarılarak ifade edilmesi (Gravemaijer, 2002) anlamına gelmektedir. Gerek düşünmeyi geliştirmeye gerek matematiksel bilgi üretmeye olan katkısı nedeniyle matematik öğretiminde ayrı bir yere sahiptir. Matematiksel modelleme üzerine çokça yayın yapılmasına, bilimsel toplantılar düzenlenmesine rağmen (örneğin ICTMA), kavramın anlamı ve sınırları ile ilgili tam bir birliktelik hala sağlanabilmiş değildir (Aztekin ve Taşpınar Şener, 2015). Niss ve Højgaard (2019) "Mathematical Competencies Revised" adlı çalışmalarında matematiksel yeterliklerle ilgili yayınladıkları "Mathematical Competence Comprises Having Knowledge of Doing, Using And Having Can Opinion About Mathematics And Mathematics Plays Or Can Play A Role" adlı yazılarına ek açıklamalar verme ihtiyacı duymuşlardır. Tutak ve Güder (2014) Türkiye'de yapılan matematiksel modelleme çalışmalarını kavramın tanımı ve kapsamı bakımından incelemiş ve bir fikir birliğinin olmadığını rapor etmişlerdir.

Matematiksel modelleme ile ilgili farklı kaynaklarda verilen tanımlarda "modellenen durum" la ilgili farklılık gösteren ifadeler vardır. Modellenen durum için Verschaffel, Greer ve De Corte (2002) de olay, olgu, olaylar arasındaki ilişki, Haines ve Crouch (2007) ve *Gravemeijer* (2002) de "gerçek hayat", Lesh ve Doerer (2003) te "problem durumu" ve OECD (2003) te "durum" gibi deyimler kullanılmıştır.

Modelleme ile ilgili başka bir karmaşa modellemenin tanımında geçen "gerçek yaşam"dan ne anlaşıldığı üzerinedir. Matematiksel modellemeyi tanıtmada kullanılan örneklerin çoğu bilimsel, az bir kısmı sosyal olaylarla ilgilidir. Niss vd. (2007) de modellemeyi "düşen bir cismin t zamanda aldığı yolun ($x=1/2\ gt^2$) üzerinden, Kertil (2000), telefon tarifesini, Erbaş vd (2014) manyetik alanın etkisi ile ilgili olan logaritmik fonksiyonları modelleme örneği olarak göstermiştir. *Sözel problemlerin modelleme problemi olarak ele alınıp alınamayacağı konusunda da farklı görüşler bulunmaktadır. Schoenfeld (1992) sözel problemlerin gerçek hayat durumlarını yansıtmadığı, gerçeklikten uzak olduğu düşüncesinden hareketle modelleme becerilerini içermeyeceğini ileri sürmüştür. Bunun yanı sıra bazı araştırmacılar, örneğin Verschaffell ve De Corte (1997) Verschaffel, Greer ve De Corte (2002) sözel problemlerin modelleme problemi olarak ele alınabileceğini belirtmişlerdir.*

Bu ve benzeri farklılıklar, öğretime temel oluşturmak üzere. matematiksel modellemeyi yeniden gözden geçirme ve temel kavramlarda birliktelik sağlama ihtiyacını doğurmaktadır. Bu yazıda matematiksel modellemenin ne olduğuna, kullanılan farklı kavramların ortak bir noktada nasıl toplanabileceğine yer verilmekte ayrıca matematiksel modellemenin karıştırıldığı problem çözme, soyutlama ile olan farklı ve ortak yanları ele alınmaktadır. Çalışma birr literatür taraması olup matematiksel modelleme kavramı bu çalışma kapsamında okul ve öğrenme ortamı bakımından ele alınmıştır ve, tartışmalar öğretimin niteliğini artırmayı amaçlamaktadır.

Matematiksel Modelleme

Matematiksel modelleme için verilmiş olan birkaç tanım şöyledir.

- ✓ Verschaffel, Greer ve De Corte (2002) ye göre matematiksel modelleme matematik veya matematik dışındaki bir olayı olguyu, olaylar arasındaki ilişkileri matematiksel olarak ifade etmeye çalışma, bu olaylar ve olgular içerisindeki örüntüleri ortaya çıkarma süreci,
- ✓ Haines ve Crouch (2007) ye göre, matematiksel modellemeyi, gerçek hayat durumlarının soyutlanarak matematik diline aktarıldığı, çözümlendiği sonra çözümün test edildiği süreç,

- ✓ Lesh ve Doerer'e (2003) göre modelleme olayları ve problemleri tanımlama açıklama ve oluşturma sürecinde problem durumlarını zihinde düzenleme koordine etme, sistemleştirme ve organize edip zihinde şemalaştırma" dır.
- ✓ OECD (2003) de modelleme "Bireylerin matematiksel bilgi ve becerileri kullanabilecekleri durumları fark etmeleri ve tanımalarından sonra içerikte yer alan matematiksel yapıyı kurabilmeleri" şeklinde ifade edilmiştir.

Bu tanımların hepsinde bir zihinsel şemanın "oluşturulması ve matematik diline aktarılması" konusunda aynı kapıya çıkacak ifadeler kullanılmakla birlikte, modellemeye konu olan durumla ilgili durum, olgu, olay, ilişki gibi farklı ifadeler yer almaktadır. OECD (2003) ün verdiği tanım dışında kalan tanımlar insan yaşamından her durumun modellenebileceği izlenimi vermektedir.

Model ve modelleme kavramları ile Gerçekçi Matematik Eğitimi (Realistic Mathematic Education) (GME) ile ilgili literatürde karşılaşılmaktadır. GME de bilginin oluşması sürecinde matematiksel modelleme ve matematik kavram ya da genellemeye ulaşmayla sonuçlanan bir süreçtir(Gravemaijer vd, 1990). Üzerinde çalışılan soru, sorun veya durumun matematiksel kararlılık içeren bir durum olması gerekmektedir. Bu süreç matematikleştirme olarak bilinir ve matematiksel modellemeyle tam uyumlu bir süreçtir. Bu açıklamalar matematiksel modellemenin, matematiksel bilgiyi üretmenin temel bir yöntemi olduğunu göstermektedir. Bu durumun matematiğin tanımına da yansıdığı görülmektedir.

Günümüzde matematik "*realitenin modellenmesini esas alan anlamlandırma ve problem çözme süreci ile oluşan bilgi ve yine bu süreç içinde gelişen beceriler*" şeklinde algılanmaktadır (De-Corte, 2004). Bu tanımda Matematik ve Matematik öğretiminde özel birkaç kavrama vurgu yapılmaktadır. Bunlar süreçle ilgili olanlar, sonuçla ilgili olanlar şeklinde iki kategoride düşünülebilir. Süreç olarak modelleme ve yanı sıra anlamlandırmaya, sonuç olarak da bilgi ve beceriye vurgu vardır. Bu açıklama matematik öğretiminde bilgi ve becerilerin yanı sıra yeterliklerin kazandırılmasının önemli olduğunu göstermektedir.

Eskisinden farklı olarak günümüzde bilgiye ulaşmanın, başta internet olmak üzere, birçok yol ve yöntemi vardır. Bundan ötürü öğretimin ana işlevi matematiksel yollarla düşünebilmeyi öğretmek olmuştur (Altun, 2019). Bu açıdan bakınca matematiğin kazandırdığı bilgi beceri yanında davranış biçiminde yarattığı değişim, daha öne çıkmaktadır. Buradaki davranış biçimindeki değişiklik ile kazanılan yeterlikler kastedilmektedir. ***Yeterlik*;** bağlamsal bir durumda karşılaşılan görevleri yerine getirmek için bilgi, beceri, tutum, anlayış vs. harekete geçirmek suretiyle başa çıkma yeteneğidir. Modelleme bir yeterliktir. Bu tanıma bağlı olarak *matematiksel yeterlik* "matematiğin etkili olduğu veya olabileceği yaşamsal durumlarda ihtiyaç duyulan matematiksel bilgi ve eylemler hakkında fikir sahibi olma bunları kullanmak suretiyle durumla (sorunla) başa çıkma kapasitesi (Niss ve Højgaard, 2011) olarak tanımlanabilir.

Matematik öğretiminde son 20 yılda PISA uygulamaları ile birlikte yeterlikler konusundaki farkındalık düzeyi iyice artmış olup, alan araştırmaları bu yeterliklerin nasıl kazandırılacağı üzerine yoğunlaşmıştır. Matematiksel yeterliklerin her biri önemli olmakla birlikte işlevleri bakımından kendi aralarında iki sınıfa ayrılmaları mümkündür. Modelleme, problem çözme stratejisi seçme ve muhakeme etme ve kanıtlama doğrudan matematik yapmayla ilgiliyken, kalan dördü matematik yapmaya yardımcı olmayla ilgilidir (Altun, 2019). Niss (2003) bu yeterliklere matematiksel düşünmeyi de dahil ederek ilk dördünü matematiksel soru sorma ve cevap alma ile ilgili olanlar ve son dördünü matematiksel dil ve araçlarla ilgili olanlar şeklinde sınıflamıştır. Yeterlik kavramı beceriden daha geniş bir anlama sahiptir ve anlamları arasında belirgin bir fark vardır. ***Beceri***; bir kişinin yapmak durumunda kaldığı görevleri yerine getirmek için, sahip olduğu bilgiyi kullanabilme yeteneğidir. Bu kullanımda başarılı olanlar diğerlerine göre daha becerikli olarak bilinirler. Aynı çalışmada matematiksel modellemenin GME deki "matematikleştirme" ile uyumlu olduğu belirtilmiş, başka bir alanla ilgili olanların ise modelleme ile değil modelleme süreci içindeki işlemlerle uyumlu olduğu ifade edilmiştir.

Özetlenen bu farklı bakış açıları nitelikli bir eğitim yapmak için kazandırılması planlanan bilgi ve yeterliklerin anlam ve kapsamlarının neler olduğunun tam olarak bilinmesinin ihtiyaç olduğunu göstermektedir.

Matematiksel Modelleme Süreci

Literatür modellemelerin döngüsel bir süreç olduğunda hem fikirdir. Farklılık sürecin adımlarını adlandırmada ortaya çıkmaktadır. Modelleme süreci ile ilgili olarak; *Lingefjard (2002) modellemenin verilenleri belirleme ve sadeleştirme, değişkenleri belirleme, formülleştirme, bir matematiksel model haline getirme, grafikle gösterme ve problem durumdaki yaşamsal ihtiyacı karşılama şeklindeki sıralı yedi aşamadan oluştuğunu belirtmiş iken* Kaiser (1995) de modellemenin altı basamakta gerçekleşen bir sıralı eylemler oluştuğunu belirtmiştir. Bunlar (i) Gerçek hayat problemini tanımlama ve sadeleştirme; (ii) Bir matematiksel model oluşturma; (iii) Modeli dönüştürme, geliştirme ve çözme; (iv) Modeli yorumlama; (v) Modeli doğrulama ve kullanmadır. *NCTM (1989) da modellemenin lineer olmayan beş aşamadan oluştuğu ve bu aşamaların (i) Gerçek hayat problemini tanımlama ve sadeleştirme (ii) Bir matematiksel model oluşturma (iii) Modeli geliştirme ve problemi çözme (iv) Modeli yorumlama ve (v) Modeli doğrulama ve kullanma olduğu belirtilmiştir.*.

Matematiksel Modelleme İle İlişkili Kavramlar

Modelleme hakkında daha net bir bilgiye varabilmek için, bazı yayınlarda ilişkilendirildiği (örneğin Aztekin ve Taşpınar Şener 2015; Tutak ve Güder; 2014) kavramlardan olan farklılıklarının açıklanmasına ihtiyaç vardır. Aşağıda matematiksel modellemenin soyutlama, problem çözme ile ilgili olan ilişkisine yer verilmiştir.

Matematiksel Modellemenin Soyutlama İle İlişkisi

Matematikte soyutlama bir matematiksel kavram veya genellemenin, üretildiği örneklerden bağımsız olarak, zihinsel bir nesne haline gelmesidir (Altun, 2019). Soyutlama sürecinin deneysel soyutlama ve bilişsel soyutlama olmak üzere iki türü vardır(Herstkowitz, Schwaz & Dreyfus, 2000).

Deneysel soyutlama gözlenen farklı durumların ortak özelliklerinin fark edilmesi ve bu ortak özelliğin gözlendiği ortamlardan bağımsız bir nesne haline gelmesidir. Örneğin, İki (2) sayısının iki sıra, iki insan, iki yumurtanın bulunduğu nesne kümelerinin denklik özelliği olarak ortaya çıkması gibi. Gözlendiği kümelerin denk olduğunu anlatan bir zihinsel şema olarak 2 sayısı bu nesne kümelerinin çokluk özelliğini anlatmaktadır. Bilişsel soyutlama ise deneysel soyutlama ile oluşan kavramı veya genellemenin fark edilen yeni özellikleri ile anlam bakımından bazen daralması, bazen genişlemesi ve soyutlandığı noktadan daha ileri bir noktaya taşınmasıdır. Örneğin 2 sayısını soyutlayan bir kimse zaman içinde 2’nin çift sayı olduğunu, asal olduğunu, asal ve çift olan yegane sayı olduğunu, sayı sistemi için taban olarak alınabileceğini, her doğal sayının 2’nin kuvvetlerinin toplamı olarak yazılabileceğini ve bu özelliğin yalnız 2’ye has olduğunu öğrenirler. Böylece bilişsel bir nesne olarak 2 zihindeki yeni şeklini alır. 2’nin bu oluşum süreci modelleme ile tam uyumludur.

***Matematiksel Modellemenin Problem Çözme İle İlişkisi*.**

Niss ve Hojgaard (2019) modellemenin pür matematiksel bilginin üretimi ile ilgili olduğunu, uygulamalı matematik kapsamındaki modelleme faaliyetlerinin problem çözme kapsamında mütalaa edilmesi gerektiğini belirtmiştir. Erbaş vd. (2014) ise “Matematik Eğitiminde Modelleme ile İlgili Temel Kavramlar ve Farklı Yaklaşımlar” adlı projede matematiksel modelleme gerçek hayat probleminin çözüm sürecindeki eylemler ile özdeş olarak düşünülmüş olup, modelleme problemlerinin daha açık uçlu oluşuma gönderme yapılarak sınırlı bir farklılıkla yetinilmiştir.

Problem çözme ve modelleme ilişkisini tartışan yazılarda sözel problemlerin modelleme becerileri bakımından zayıf kaldığını belirten ifadelere yer verilmiştir. Verschaffel ve De Corte (1997) sözel problemlerin modelleme içerebileceğini belirtirken, Niss, Blum ve Galbraith (2007) sözel problemlerde, problem durumun gerçek hayat olmadığını, bütün değişkenlerin belli, idealleştirilmiş yapay bir durum olduğunu ve modelleme becerilerini karşılayamayacağını belirtmişlerdir.

Matematiksel Modellemenin Öğretimi İçin Genel Değerlendirme

Matematiksel modelleme ile ilgili bu açıklamalar, öğretiminde referans alınabilecek iki ana noktayı öne çıkarmaktadır. Bunlar (i) modellenen bir “durum” un varlığı ve (ii) modelleme sürecidir. Bunlardan “durum” sözcüğüne olay olgu, sorun, ilişki eşlik etmektedir ancak bunların niteliği ile ilgili yeterli bir açıklama yoktur.

Doğada hemen her şey kararlı davranmaktadır ve bu kararlılık ancak matematikle açıklanabilmektedir. Yaşantımızda karşılaştığımız olay, olgu ve durumlar; zaman ve mekan içindeki davranış biçimleri dikkate alınarak:

i. Kararlı davrananlar
ii. Kısmi kararlı davrananlar ve
iii. Kararsız davrananlar(Altun, 2020) şeklinde sınıflandırılabilir

Kararlı davranan olay deyimi ile olayın her durumda aynı kalması veya aynı kalan en az bir özelliğinin olması anlatılmak istenmektedir. Örneğin, bir hareketlinin aldığı yol "hızı ile geçen sürenin çarpımı" ile açıklanabilir (l=v.t). Bu eşitlik füze hareketini açıklamak için ne ölçüde geçerli ise saç boyunun uzaması için de o ölçüde geçerlidir. Bir kaldıraçta "kuvvet x kuvvet kolu= yük x yük kolu" eşitliği bir vinçte ne ölçüde geçerli ise bir tahterevallide de aynı ölçüde geçerlidir. ($p_1 . l_1 = p_2 . l_2$). Bir maddenin kütlesi, türü ne olursa olsun, yoğunluğu ile hacminin çarpımına eşittir (m= d .V) gibi.

Kısmi kararlı davranan olaylarla ise istatistiksel bağıntılara indirgenebilen olaylar kastedilmektedir.

- Ders çalışma süresi ile ders başarısı arasında pozitif bir ilişki vardır.
- Konuşma süresi uzadıkça dikkat azalır. Yani süre ile dikkat arasında negatif bir ilişki vardır.
- Egzersiz yapan bireyin kas kuvveti artar. Egzersize ayrılan süre ile kas kuvveti arasında pozitif bir ilişki vardır.

Bu tür olaylarda her durumda aynı sonuç gözlenmese ~~ise~~ de, kısmi bir kararlılık vardır ve sonuçlar tahmin edilebilir türdendir. Örneğin bebeğin yaşı ile kütlesi arasında pozitif bir korelasyon vardır ve bu iki değişkenin ilişkisi matematik diliyle ifade (regresyon denklemleri) edilebilir. Bu denklemlerden yararlanarak kaç aylık olduğu bilinen bir bebeğin kütlesi tahmin edilebilir.

Yukarıda anlatılanların yanı sıra yaşantımızda kararlı olmayan durumlar da vardır ve oldukça çoktur. Bugün kaç kere güleceğimiz, kaç tehlike ile karşılaşacağımız, kaç yaprağın dalından düşeceği kararsız birer durumdur. Kararsız "durum" lar yaşantımızda sürprizler yaratabilir, bazen kaosa bile yol açabilirler. Bunların bir matematiği yoktur ve olmayan matematiğin gözlenmesi de mümkün değildir.

Modelleme ile ilgili olarak verilen tanımlarda geçen "bir durum, bir olay, bir olgu, bir ilişki" deyimi ile anlatılmak istenen tam da bu "kararlı veya kısmi kararlı" içeriğe sahip olan yapıdır.. Buradaki "kararlı ve kararsız olma hali" müzik ile gürültü arasındaki farka benzetilebilir. İkisi de çok sestir. Müzik kararlı yapıya benzer çünkü bir oluşum kanunu(kuralı) vardır. Algılanır ve zihnimizde şemalaşır, istediğinde onu tekrar edebiliriz. Gürültüye sıra gelince gürültü de çok ses olmasına rağmen zihnimizde şemalaşmaz istesek de onu tekrar edemeyiz yani aynı gürültüyü çıkaramayız.

Bu açıklama matematiksel modellemenin tanımına yansıtılabilir. Bu durumda Matematiksel modellemenin tanımı; "içeriğinde kararlı ve kısmi kararlı özellikler olan yaşamsal durumların bu özelliğinin fark edilebilmesi ve matematik diline aktarılarak ifade edilmesidir" şeklinde verilebilir.

İnsanlık (bilim) bu kararlı ya da kısmi kararlı durumları fark edip ortaya çıkardığı için onların arkasındaki gücü kontrol altında tutmayı, tehlikeli olabilecek olanlarından korunmayı hatta onlardan yararlanabilmeyi başarabilmiştir. Bundan ötürü matematiğin gücü önemli ölçüde modelleme özelliğinden ileri gelmektedir" denilebilir.

Bu açıklamalar ışığında problem çözme ve modellemenin örtüşen ve ayrışan yanlarının değerlendirilmesi de mümkündür. Modelleme ve problem çözme kavramları matematiğin "realitenin modellenmesini temel alan, anlamlandırma ve problem çözme sonucunda oluşan bilgi ve yine bu süreç içinde gelişen beceriler"(De Corte; 2004) şeklinde verilen tanımında yan yana yer almaktadır. Bu tanımda modelleme bilgiye varmanın bir yolu, problem çözme ise modele ulaşma süreci olarak yansıtılmaktadır. Modellemenin bu tanım içindeki kullanımı Niss ve Hojgaard (2019) ın matematiksel bilgi üretilmesi söz konusu olduğunda modelleme olacağı, yaşamsal bir problemin çözümü söz konusu olduğunda ise modelleme olmayacağı fikriyle farklılık göstermektedir. GME'deki matematikleştirme sürecinin açıklandığı örneklerde ise seçilen problemlerin doğal olaylarla ilgili olması da bu durumu destekler niteliktedir. OECD (2003) de modelleme için verilen "bireyin matematik bilgi ve becerilerini kullanabilecekleri durumları fark etmeleri ve içerikte yer alan matematiksel yapıyı kurabilmeleri" şeklindeki tanımı da modellemenin pür matematikle sınırlı olması gerektiği izlenimi vermemektedir.

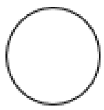
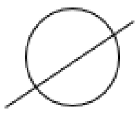
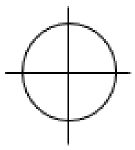
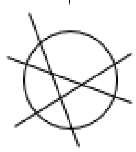
Bir problem çözümü sırasında eğer kararlı veya kısmi kararlı bir özellik fark edilip matematik diliyle aktarılıyor ise bu durumda problem çözme süreci modellemeyle örtüşür. Örnek olarak; "*Dairesel bir pasta n tane doğrusal kesim ile en çok kaç parçaya ayrılır?*" Sorusunun yanda verilen çözümünü göz önüne alalım.

Problemin çözümü incelendiğinde parça sayısının düzenli arttığı yani parça sayılarının bir örüntü oluşturduğu (kararlı bir yapı gösterdiği) görülmektedir. Bu kararlı yapı *"Dairesel bir pasta doğrusal kesimlerle parçalara ayrıldığında n doğrusal kesim ile en çok* $\frac{n.(n+1)}{2}+1$ *parçaya ayrılır"* şeklinde ifade edilebilir . Parça sayısı (P) nin değeri $P=\frac{n.(n+1)}{2}+1$ dir . Elde edilen bu eşitlik sayesinde bahsi geçen olayın değişik formlarında da aynı kalan (iki kesim, üç kesim, dört kesim…) kararlı bir durumdur ve sonuçta bu kararlı yapıyı anlatan bir model bulunmuş olmaktadır.

Ek olarak belirtmek gerekir ki modelleme için kararlı veya kısmi kararlı bir yapının illa da bir eşitlik veya eşitsizliğe indirgenmesi gerekmez. Ulaşılan bilgide bir örüntünün, türeyiş kuralının olduğunun görülmesi yeterlidir. Denk kesirlerle ilgili; aşağıdaki örnekte $\frac{1}{3}$ kesrine denk kesirler verilmiştir. Burada soru "bu kesrin genel bir formu var mıdır? şeklindedir.

$\frac{1}{3}=\frac{1+3}{5+7}=\frac{1+3+5}{7+9+11}=\cdots$ Sorusuna cevap olarak ulaşılan $\frac{\sum_{i=0}^{n} 2n+1}{\sum_{i=n+1}^{2n+1} 2n+1}$ ifadesi bir matematiksel modeldir.

Benzer yaklaşımla doğadaki canlı yapılanmasında gözlenebilen birçok olayı açıklayabilen Fibonacci Dizisi (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…) türeyiş kuralı belli (kararlı yapı) olduğu için bir matematiksel modeldir.

Diyagram	Kesim Sayısı	Parça Sayısı
	-	1
	1	2
	2	4
	3	7
......	......	......
	n	$\frac{n.(n+1)}{2}+1$

Bir başka değerlendirme de modellemenin sınırlılığı ile ilgilidir. Erbaş vd. (2014) bir matematiksel modelin ilgili bulunduğu durumun tüm özelliklerini taşıyamayacağı, bunun yanı sıra, tek bir matematiksel gösterimin de matematiksel modelleme olamayacağı düşüncesini ileri sürmüştür. Modellemede önemli olan modellenen durumda kararlı veya kısmi kararlı davranan bir özelliğin fark edilmesidir.

Modelleme gerçek yaşamla ilgili olmak zorunda mıdır? sorusu da bir tartışma konusudur. Matematiksel modellemeyi anlatmak için verilen tanımların gerçek yaşam kavramına ağırlık verdiği açıktır. Örneğin, Lesh vd.(2000) modelleme sürecinin aşamaları olarak bildirdiği (i) Model oluşturma, (ii) Gerçeklik, (iii) Öz değerlendirme, (iv) Model açığa çıkarma, (v) Model genişletme problemleri, (vi) Etkin model prensibi şeklindeki adımlarda yer alan model ve gerçeklik ilkelerinde de, problemin gerçek olmasından söz edilmiştir.

Modelleme ile ilgili yazılarda modellenen durumlara örnek olarak da çoğunlukla bilimsel formüller gösterilmiştir. Niss vd. (2007) serbest düşme hareketinin zamana bağlı davranmasını ($x=1/2\ gt^2$), Erbaş vd. (2014)'te maliyet hesaplarının türevle açıklanması, ışık hızı ile enerji arasındaki ilişkiyi açıklayan $E=mc^2$ formülünün kullanılması gibi.

Matematiksel modellemenin gerçek yaşamla ilişkisini belirlemede GME'nin bilgi üretmede izlediği bir yöntem olan ve "matematikleştirme" eyleminin içeriğinden yararlanılabilir. GME'de bahsi geçen modelleme için yaşamsal bir durum olması yerine yaşamsal veya yaşanılabilir olması yeterli bulunur (Gravemaijer, 1994). Aynı kaynakta "Geometrik Dizi"yi anlatmak için seçilen ağaç yılanının halka sayısı konu edilmekte olup öğrencilere yılanın bir aylık olunca bedeninde bir kırmızı halka oluştuğu, sonra her ay bu kırmızı halkaların ikiye bölünerek ortasında bir sarı halka meydana geldiğinden söz edilmektedir. Bir süre sonunda meydana gelen kırmızı (K) ve sarı (S) halka sayıları sorulmaktadır. K, KSK, KSKSKSK … şeklinde ilerleyen kırmızı ve sarı halka sayılarından kırmızı olanların sayısı n. ay sonunda 2^{n-1} şeklinde oluşmaktadır. Kırmızı halka sayıları kararlıdır ve n. ayda yılanın kaç kırmızı halkası olacağı kesin olarak belirlenebilir. Aslında böyle bir yılan türünün olmadığı fakat olmasının mümkün olduğu bildirilmektedir.

Sözel problemlerin modelleme içerip içermeyeceği konusunda da farklı görüşler bulunmaktadır. Sözel problemler gerçeğin idealleştirilmiş halleri olup çoğu kez bilinen kurallar kullanılarak çözülebilir problemlerdir (Schoenfeld, 1992). İfadelerinin başına "varsayalım ki" sözcüğü getirildiğinde anlamları bozulmaması ile gerçek problemlerden kolayca ayırt edilebilirler.

Schoenfeld (1992) sözel problemlerin modelleme için zayıf kaldığını işaret ederken Verschaffel ve De Corte (1992) sözel problemlerin modelleme içerebileceğini belirtmiştir. Burada nihai kararı vermede problemlerin süreç becerilerine göre düştüğü sınıf belirleyici olabilir. Problemler süreçleri itibariyle "Formüle etme, uygulama ve yorumlama-değerlendirme soruları" şeklinde üçe ayrılırlar (OECD; 2012). Buradan süreç itibariyle formüle etme ile ilgili bazı problemlerin modelleme içerebileceği, bunun yanı sıra süreç itibariyle de yorumlama-değerlendirme sorularının modelleme değil mevcut model üzerinde bir çalışma olduğu söylenebilir. Gravemaijer (1994) soyutlama için ilgilenilen durumun yaşanılabilir olmasını yeterli olduğunu belirtmesi sözel problemlerin de modelleme içerebileceğini düşündürtmektedir**. M**odelleme için önemli olan noktanın problemin içeriğinin kararlı veya kısmi kararlı bir durum içerip içermediği hususudur..

Yukarıda anlatılanlara örnek olarak bir virüsün yayılma hızının 5 günde 5 katına çıktığını yani sözgelimi bir insanın 5 insanı enfekte ettiğini ve üreyen virüsler için bu üreme kuralının geçerli olduğunu düşünelim. Bir virüsten t günde kaç kişi enfekte olur? sorusu sözeldir ve çözümü bir matematiksel modelin ortaya çıkması ile sonuçlanır. Modelleme ile ilgili verilen genellenebilirlik özelliği rutin sözel problemlerin çözümü için yazılan denklemlerin; örneğin *"Paramın 2 katının 5 lira fazlası 17 lira ediyor"* param kaç lira? "param x olsun" diyerek yazılan 2x+5=17 nin bir matematiksel model olmadığını ortaya koyar. Bu tür sembolik ifadelerin temsil olaarak değerlendirilmesi gerekir.

Yaşamda karşılaşılan olaylar, olgular, durumlar doğal olabildiği gibi sosyal de olabilir. Örneğin, her türden seçim sistemi bir sosyal olaydır ve seyirlerinin dayandırıldığı bir matematiksel kural vardır. Örneğini; milletvekili seçimleri için önerilmiş olan D'Hont sistemine göre hangi partinin kaç milletvekili çıkaracağı hususu şöyle açıklanmıştır. Seçime giren partilerin her birinin aldıkları toplam oylar sırayla 1'e, 2'ye, 3'e… bölünmekte ve bu bölme işlemine bölgenin çıkaracağı milletvekili sayısına kadar devam edilmektedir. Meydana gelen sayı tablosundaki tüm sayılar içinde en büyük sayıdan başlanarak milletvekili sayısı kadar sayı tespit edilmekte, tespit edilen sayıların hangi parti sütununda olduğuna bakılarak milletvekilleri dağıtılmaktadır.

Bu örnekte olduğu gibi başlangıçta sosyal olayların mevcut bir matematiği yoktur fakat biz ihtiyaç halinde onlara bir matematik yüklemekteyiz. Ne var ki bu yükleme olaydan bağımsız gelişigüzel bir yükleme olmayıp, olayla ilgili gözlem ve deneyimlerin zihnimizde oluşturduğu kanaatlerin etkili olduğu bir matematiktir. Literatürde modelleme için verilen çok sayıda örnek arasında bu türden olanlara da rastlanmaktadır. Örneğin, Kertil (2008) de yer alan bir örnek, telefon tarifesi ile ilgilidir. Soruda "Telefon Görüşmesi" ilk dakikası 100 kuruş, devam eden her dakika için 20 kuruş olması halinde t dakika için ödenecek para miktarını bildiren matematiksel modelin (formülün) yazılması istenmektedir.

Sosyal olaylarla ilgili matematiksel modellerin, bilimsel olaylarla ilgili olanlardan en büyük farkı bilimsel olanlar değişmez iken sosyal olanların değişebilir olmalarıdır. Sosyal olaylarla ilgili olanlar toplumun ihtiyaçlarına göre yetkili organlar tarafından değiştirilebilirler. Belediyelerin içme suyu sarfiyatını belirleyen formülde değişiklik yapması gibi.

Sonuç

Bu çalışma günümüz matematik öğretiminde yeterliklerin öğretiminin ağırlık kazanması üzerine bu yeterliliklerden biri olan modelleme kavramının anlamını, sınırlarını, ilişkili bulunduğu kavramlarla benzer ve farklı yanlarını tartışarak daha net bilgiye ulaşmayı hedeflemektedir.

Bütün bu kavramlarla ilgili ifade ve görüş farklılıklarını gidermede, matematiğin **"realitenin modellenmesini temel alan anlamlandırma ve problem çözme ile oluşan bilgi ve süreç içinde gelişen beceriler**"(De Corte, 2004**)** şeklindeki tanımı ve tanımda geçen kavramların açıklık getirebileceği anlaşılmıştır. Ayrıca, modellemeye esas olan durum kavramı içindeki kararlı, kısmi kararlı yapılar ve kararsız yapılar şeklindeki sınıflamanın belirleyici olabileceği, matematiksel modelleme yapılabilmesi için, karşılaşılan durumda kararlı veya kısmi kararlı olması gerektiği, yaşamsal her durumun da modellenemediği sonucuna varılmıştır.

Bir başka sonuç, doğal yaşamda matematik içeren durumların modellenebildiği hususu ve böyle elde edilen modellerin değişmez olduğudur. Bunun yanı sıra matematik içeriği olmamasına rağmen toplumsal düzeni sağlamak için, sosyal olaylara matematiksel modellerin yüklenebildiği ve yine her sosyal olaya matematik yüklenemediği, dolayısı ile sosyal olaylarla ilgili bir modellemeden söz edilebilir.

Sözel problemlerin gerçeğin idealleştirilmiş şekli olduğu için gerçek yaşamdan uzak olsalar bile süreç becerileri bakımından formüle etme ile ilgili olan sözel problemlerin modelleme içerebileceği de ulaşılan sonuçlardan bir diğeridir.

Bu sonuçlardan genelde matematiksel modelleme ilgili araştırmalarda ve yeterliklerinin öğretiminde, özelde matematik öğretiminde yararlanılabileceği beklenebilir.

Kaynakça

Altun, M. (2018). Ortaokullarda matematik öğretimi. Bursa,,13.baskı, Aktüel Alfa Akademi Yayıncılık.

Altun, M. (2019). Yaşam Temelli Müfredatlar için Öğretim ve Değerlendirme. Uluslararası Fen, Matematik, Girişimcilik ve Teknoloji Eğitimi Kongresi, İzmir. Erişim Adresi: http://2019.fmgtegitimikongresi.com/dosyalar/files/fmgtek_tam_metin.pdf

Altun, M. (2020). Matematik Okuryazarlığı El Kitabı. *1. Baskı. Aktüel Yayınları. Bursa*.

Altun, M ve Bozkurt, I. (2017). A New Classification Proposal For Mathematical Literacy Problems. *Education and Science*. 42(190), 171-188.

Aztekin, S., & Şener, Z. T. (2015). Türkiye'de matematik eğitimi alanındaki matematiksel modelleme araştırmalarının içerik analizi: Bir meta-sentez çalışması. *Eğitim ve Bilim*, 40(178).

De- Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied psychology, 53*(2), 279-310.

Erbaş A., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakıroğlu, E., Alacacı, C., Baş. S., (2014). Matematik Eğitiminde Matematiksel Modelleme: Temel Kavramlar ve Farklı Yaklaşımlar. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri • Educational Sciences: Theory & Practice, 14*(4), 1-21.

Gravemeijer, K., Heuvel-Panhuizen, van den, M. H. A. M., & Streefland, L. (1990). *Context free productions tests and geometry in realistic mathematics education*. (Research in mathematics education; Vol. 11). Utrecht: Researchgroup for Mathematical Education and Educational Computer Center, State Univ. of Utrecht.

Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From models to modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers, & L. Verschaffel (Eds.), Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education (pp. 7-22). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Haines, C., & Crouch, R. (2001). Recognizing constructs within mathematical modelling. Teaching Mathematics and its Applications, 20(3), 129-138.

Haines, C., & Crouch, R. (2007). Mathematical modeling and applications: Ability and competence frameworks. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study (pp. 417-424). New York, NY: Springer.

Kaiser, A. (1993). A New Multi-Category Classification of Subcutaneous Fat Deposits of Songbirds (Una Nueva Clasificación, con Multi-categorías, para los Depósitos de Grasa en Aves Canoras). *Journal of Field Ornithology* , 64(2), 246-255.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht - Ein Überblicküberdie aktuelleund historische Diskussion. In G. Graumann et al. (Eds.), Materialien füreinenrealitätsbezogenen Mathematik un terricht (pp. 66-84). BadSalzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G. (2006). Mathematical modelling at schools - How to promote modelling competencies. Toappear in C.P. Haines, P. Galbraith, W. ve Blum, S. Khan (eds.), Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood Publishing.

Kertil, M. (2008). Matematik öğretmen adaylarının problem çözme becerilerinin modelleme sürecinde incelenmesi (Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Bölümü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, İstanbul). http://tez.yok.gov.tr adresinden edinilmiştir.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. & Post, T. R. (2000). Principles for Developing Thought- Revealing Activities for Students and Teachers, A. Kelly, R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (591-646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh,H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lingefjard, T. (2002). Teaching and assessing mathematical modeling. Teaching Mathematics and Its Applications, 21 (2), 75-83.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study (pp. 3-32). New York: Springer.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A, Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), 3rd Mediterranean conference on mathematical education (pp. 115-124). Athens: Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study (pp. 3-32). New York: Springer.

Niss, M. A., & Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: Roskilde Universitet. IMFUFA-tekst : i, om og med matematik og fysik, No. 485.

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

OECD. (2003). *The PISA 2003 assesment framework – mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills.* Paris: OECD Publishing.

Papert, S. 1972. "Teaching children to be mathematicians v. teaching about mathematics,". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 3(3) July-Sept.

Santos-Trigo, M. (1996). Instructional Qualities of a Successful Mathematical Problem Solving Class. *İnstructional Journal of Mathematics Education In Science and Technology*, 29 (5), 831-646.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning To Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, And Sense Making In Mathematics. In:D. Grouws (Ed.). Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan.

Sriraman, B. (2005). Are Giftedness and Creativity Synonyms in Mathematics? . *Journal of Secondary Gifted Education,* 17(1), 20-36.

Tutak, T. ve Güder, Y. (2014). Matematiksel Modellemenin Tanımı, Kapsamı ve Önemi. *Turkish Journal of Educational Studies*, 1 (1), 173-190.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling and problem solving in the elementary school. A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28(5), 577-601.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. In K. P. Gravemeijer, R. Lehrer,H. J. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education (pp. 171-195). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.